TRƯỜNG ĐH KHTN	**ĐỀ THI THỬ THPTQG LẦN 1**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**NĂM HỌC 2020 – 2021**
KHTN	**MÔN: TOÁN**
	Thời gian làm bài: 90 phút; không kể thời gian phát đề

Câu 1 (TH): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng này bằng

A. $\frac{\sqrt{17}}{16}$ **B.** $\frac{\sqrt{17}}{4}$ **C.** $\frac{16}{\sqrt{17}}$ **D.** 16

Câu 2 (TH): Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=x+3$ và parabol $y=2x^2-x-1$ bằng

A. 9 **B.** $\frac{13}{6}$ **C.** $\frac{13}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 3 (TH): Phương trình $z^4=16$ có bao nhiêu nghiệm phức?

A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Câu 4 (VD): Cho hàm số $y=x^3-mx^2-m^2x+8.$ Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía bên trên trục hoành?

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 6

Câu 5 (TH): Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 0

Câu 6 (NB): Hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là

A. $[1;+\infty)$ **B.** $(1;+\infty)$ **C.** $(-\infty;+\infty)$ **D.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Câu 7 (TH): Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz,$ cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(Q):x-y+2z=0.$ Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(0;-1;2),$ song song với đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng $(Q).$

A. $x+y-1=0$ **B.** $-5x+3y+3=0$ **C.** $x+y+1=0$ **D.** $-5x+3y-2=0$

Câu 8 (TH): Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1)$ là

A. $\left(\frac{1}{2};1\right]$ **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right]$ **C.** $\left[\frac{1}{4};1\right]$ **D.** $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Câu 9 (VD): Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right|=2m-1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

A. $1 < m < \frac{3}{2}$ **B.** $4 < m < 5$ **C.** $3 < m < 4$ **D.** $2 < m < \frac{5}{2}$

Câu 10 (TH): Số nghiệm thực của phương trình $\log_4 x^2 = \log_2 \left(x^2 - 2\right)$ là:

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Câu 11 (TH): Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + 1 - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

A. 3 **B.** 33 **C.** 32 **D.** 31

Câu 12 (VD): Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\sqrt{ab}}\left(a\sqrt[3]{b}\right) = 3.$ Tính $\log_{\sqrt{ab}}\left(b\sqrt[3]{a}\right).$

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** 3 **D.** -3

Câu 13 (TH): Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên $(0;+\infty)$ bằng:

A. 6 **B.** 4 **C.** 24 **D.** 12

Câu 14 (VD): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng $45^0.$ Gọi E là trung điểm của $BC.$ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và $SC.$

A. $\frac{2a\sqrt{19}}{19}$ **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{19}$ **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{19}}{5}$

Câu 15 (TH): Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m không vượt quá 2021 để phương trình $4^{x-1} - m.2^{x-2} + 1 = 0$ có nghiệm?

A. 2019 **B.** 2018 **C.** 2021 **D.** 2017

Câu 16 (TH): Biết rằng $\int_1^2 \frac{x^3 - 1}{x^2 + x}dx = a + b\ln 3 + c\ln 2$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính $2a + 3b - 4c.$

A. -5 **B.** -19 **C.** 5 **D.** 19

Câu 17 (TH): Biết rằng $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b.$ Tính $\log_{45} 4$ theo $a,b.$

A. $\frac{2a+b}{2}$ **B.** $\frac{2b+a}{2}$ **C.** $\frac{2}{2a+b}$ **D.** $2ab$

Câu 18 (TH): Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau, chia hết cho 15 và mỗi chữ số đều không vượt quá 5.

A. 38 **B.** 48 **C.** 44 **D.** 24

Câu 19 (NB): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho điểm $A(1;3;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 3 = 0.$ Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Câu 20 (TH): Một lớp học có 30 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn một ban cán sự lớp gồm 3 học sinh. Tính xác suất để ban cán sự lớp có cả nam và nữ.

A. $\frac{435}{988}$ **B.** $\frac{135}{988}$ **C.** $\frac{285}{494}$ **D.** $\frac{5750}{9880}$

Câu 21 (TH): Tính nguyên hàm $\int \tan^2 2xdx$.

A. $\frac{1}{2}\tan 2x - x + C$ **B.** $\tan 2x - x + C$ **C.** $\frac{1}{2}\tan 2x + x + C$ **D.** $\tan 2x + x + C$

Câu 22 (TH): Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-99;100]$ của bất phương trình $\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^x \ge \left(\cos\frac{3\pi}{10}\right)^{\frac{4}{x}}$ là:

A. 5 **B.** 101 **C.** 100 **D.** 4

Câu 23 (TH): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0.$ Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{4}{9}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{4}{9}$ **D.** $\sin\alpha = -\frac{4}{9}$

Câu 24 (TH): Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 + u_{2020} = 2,\ u_{1001} + u_{1221} = 1.$ Tính $u_1 + u_2 + ... + u_{2021}.$

A. $\frac{2021}{2}$ **B.** 2021 **C.** 2020 **D.** 1010

Câu 25 (TH): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(-1;2;0)$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng:

A. $\frac{\sqrt{17}}{9}$ **B.** $\frac{\sqrt{17}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{17}}{9}$ **D.** $\frac{2\sqrt{17}}{3}$

Câu 26 (VD): Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \frac{8}{3}x^3 + 2\ln x - mx$ đồng biến trên $(0;1)$?

A. 5 **B.** 10 **C.** 6 **D.** vô số

Câu 27 (TH): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ và hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z = 0, (Q): x - 2y + 3z + 4 = 0.$ Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{7}$ **B.** $x^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{7}$

C. $x^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \frac{2}{7}$ **D.** $x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{2}{7}$

Câu 28 (TH): Tìm nguyên hàm $\int(2x-1)\ln xdx$.

A. $\left(x-x^2\right)\ln x+\dfrac{x^2}{2}-x+C$

B. $\left(x-x^2\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$

C. $\left(x-x^2\right)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C$

D. $\left(x-x^2\right)\ln x+\dfrac{x^2}{2}+x+C$

Câu 29 (VDC): Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $2^{a+b+2ab-3}=\dfrac{1-ab}{a+b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức a^2+b^2 là:

A. $3-\sqrt{5}$ **B.** $\left(\sqrt{5}-1\right)^2$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ **D.** 2

Câu 30 (VD): Cho hàm số $y=mx^3+mx^2-(m+1)x+1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên R?

A. $-\dfrac{3}{4}<m<0$ **B.** $m\le 0$ **C.** $-\dfrac{3}{4}\le m\le 0$ **D.** $m\le -\dfrac{3}{4}$

Câu 31 (VD): Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=x^2+8\ln 2x-mx$ đồng biến trên $(0;+\infty)$?

A. 6 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 8

Câu 32 (TH): Cho số phức z thỏa mãn $3z+i\left(\overline{z}+8\right)=0$. Tổng phần thực và phần ảo của z bằng:

A. -1 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -2

Câu 33 (VDC): Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;0;2)$, $B(-1;1;3)$, $C(3;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$. Biết rằng điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Câu 34 (TH): Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$.

A. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ **C.** $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ **D.** $\dfrac{1}{2x+2\sqrt{x}}$

Câu 35 (TH): Tính nguyên hàm $\int x^2\left(2x^3-1\right)^2dx$.

A. $\dfrac{\left(2x^3-1\right)^3}{18}+C$ **B.** $\dfrac{\left(2x^3-1\right)^3}{3}+C$ **C.** $\dfrac{\left(2x^3-1\right)^3}{6}+C$ **D.** $\dfrac{\left(2x^3-1\right)^3}{9}+C$

Câu 36 (TH): Phương trình $2^x=3^{x^2}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 37 (VD): Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;0)$?

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Câu 38 (TH): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và $\left(ABCD\right)$.

A. 90^0 **B.** 45^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Câu 39 (TH): Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ là:

A. $\left(0;0\right)$ **B.** $\left(0;2\right)$ **C.** $\left(1;0\right)$ **D.** $\left(-1;4\right)$

Câu 40 (VD): Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'\left(x\right)+\left(x+1\right)f\left(x\right)=e^{-x}$ với mọi x. Tính $f'\left(0\right)$.

A. 1 **B.** -1 **C.** $\frac{1}{e}$ **D.** e

Câu 41 (TH): Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A\left(1;-1;-2\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right):x-2y-3z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{-3}$ **B.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-3}$ **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$

Câu 42 (VDC): Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y=mx^9+\left(m^2-3m+2\right)x^6+\left(2m^3-m^2-m\right)x^4+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Vô số **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 43 (VD): Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $2f\left(x\right)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x$ với mọi $x>0$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(x\right)dx$.

A. $\frac{7}{12}$ **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 44 (TH): Biết rằng đường thẳng $y=1-2x$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng:

A. 20 **B.** $\sqrt{20}$ **C.** 15 **D.** $\sqrt{15}$

Câu 45 (VD): Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3a,BC=4a,CA=5a$, các mặt bên tạo với đáy góc 60^0, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ thuộc miền trong tam giác ABC. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

A. $2a^3\sqrt{3}$ **B.** $6a^3\sqrt{3}$ **C.** $12a^3\sqrt{3}$ **D.** $2a^3\sqrt{2}$

Câu 46 (VD): Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là $2a$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng a. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $2\sqrt{2}a^3$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 47 (TH): Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $3x-2$ và đồ thị hàm số $y=x^2$ quanh quanh trục Ox.

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{4}{5}$ **D.**

Câu 48 (TH): Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $2(u_3+u_4+u_5)=u_6+u_7+u_8$. Tính $\frac{u_8+u_9+u_{10}}{u_2+u_3+u_4}$.

A. 4 **B.** 1 **C.** 8 **D.** 2

Câu 49 (VD): Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|=|\overline{z}+1-i|$.

A. $x-2y-2=0$ **B.** $x+y-2=0$ **C.** $x-y+2=0$ **D.** $x-y-2=0$

Câu 50 (VDC): Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=3a$, góc $\angle SAB=\angle SCB=90^0$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{6}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $36\pi a^2$ **B.** $6\pi a^2$ **C.** $18\pi a^2$ **D.** $48\pi a^2$

Đáp án

1-C	2-A	3-B	4-C	5-B	6-B	7-C	8-A	9-D	10-B
11-D	12-B	13-D	14-A	15-B	16-D	17-C	18-A	19-B	20-C
21-A	22-C	23-B	24-A	25-D	26-C	27-B	28-A	29-C	30-D
31-D	32-D	33-C	34-D	35-A	36-A	37-C	38-C	39-B	40-B
41-A	42-B	43-D	44-D	45-A	46-D	47-D	48-A	49-D	50-A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án C

Phương pháp giải:

Cho đường thẳng d_1 đi qua điểm M_1 và có VTCP $\overrightarrow{u_1}$; đường thẳng d_2 đi qua điểm M_2 và có VTCP $\overrightarrow{u_2}$.

Khi đó ta có khoảng cách giữa d_1, d_2 được tính bởi công thức: $d(d_1;d_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$.

Giải chi tiết:

Ta có:

$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow d_1$ đi qua $M_1(0;1;-1)$ và có 1 VTCP là: $\overrightarrow{u_1} = (2;1;-2)$.

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2} \Rightarrow d_2$ đi qua $M_2(1;2;3)$ và có 1 VTCP là: $\overrightarrow{u_2} = (1;2;-2)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M_1M_2} = (1;1;4) \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (2;2;3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(d_1;d_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{|2+2+12|}{\sqrt{2^2+2^2+3^2}} = \frac{16}{\sqrt{17}}.$$

Câu 2: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Xét phương trình hoành độ tìm 2 đường giới hạn $x = a, x = b$.

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$, đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Giải chi tiết:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x + 3 = 2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_{-1}^{2} |x + 3 - 2x^2 + x + 1| dx = 9$.

Câu 3: Đáp án B

Phương pháp giải:

Sử dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Giải chi tiết:

Ta có

$$z^4 = 16 \Leftrightarrow z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 4 \\ z^2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 2 \\ z = \pm 2i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phức.

Câu 4: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Giải phương trình $y' = 0$ xác định các giá trị cực trị theo m.

- Chia các TH, tìm các giá trị cực tiểu tương ứng và giải bất phương trình $y_{CT} < 0$.

Giải chi tiết:

Ta có $y' = 3x^2 - 2mx - m^2$; $y' = 0$ có $\Delta' = m^2 + 3m^2 = 4m^2 \ge 0 \forall m$.

Để hàm số có cực tiểu, tức là có 2 điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow m \ne 0$

Khi đó ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m+2m}{3} = m \Rightarrow y = -m^3 + 8 \\ x = \dfrac{m-2m}{3} = -\dfrac{m}{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{5m^3}{27} + 8 \end{array}\right.$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0 \\ y_{CT} = -m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ y_{CT} = \dfrac{5m^3}{27} + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{6}{\sqrt[3]{5}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 2 \\ -\dfrac{6}{\sqrt[3]{5}} < m < 0 \end{array}\right.$

Lại có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 1\}$. Vậy có 4 giá trị của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Đáp án B

Phương pháp giải:

Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases}$

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y = \dfrac{mx+4}{x+m} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì

$\begin{cases} y' < 0 \\ -m \notin (-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} -m \le -1 \\ -m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le m < 2 \\ -2 < m \le -1 \end{array}\right.$.

Lại có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \pm 1$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Đáp án B

Phương pháp giải:

Hàm số $y = x^n$ với $n \notin \mathbb{Z}$ xác định khi và chỉ khi $x > 0$.

Giải chi tiết:

Hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ xác định khi và chỉ khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy TXĐ của hàm số là $(1; +\infty)$.

Câu 7: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Xác định $\overrightarrow{u_\Delta}$ là 1 VTCP của Δ và $\overrightarrow{n_Q}$ là 1 VTPT của (Q).

- Vì $\begin{cases}(P)//\Delta \\ (P)\perp(Q)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_\Delta} \\ \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_Q};\overrightarrow{u_\Delta}\right]$.

- Phương trình mặt phẳng đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có 1 VTPT $\to \vec{n}(A;B;C)$ là

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Giải chi tiết:

Đường thẳng Δ có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;-2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có 1 VTPT là $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;2)$.

Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là 1 VTPT của mặt phẳng (P). Vì $\begin{cases}(P)//\Delta \\ (P)\perp(Q)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_\Delta} \\ \overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{n_Q}\end{cases}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_Q};\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(3;3;0) \Rightarrow \vec{n}(1;1;0)$ cũng là 1 VTPT của (P).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $1.(x-0)+1.(y+1)+0.(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y+1=0$.

Câu 8: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Tìm ĐKXĐ của bất phương trình.

- Giải bất phương trình logarit: $\log_a f(x)\le\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)\ge g(x) khi\, 0<a<1$.

Giải chi tiết:

ĐKXĐ: $\begin{cases}x>0 \\ 2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Ta có:

$\log_{\frac{1}{2}} x\le\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1)$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x\le\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)^2 \Leftrightarrow x\ge(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2\ge 4x^2-4x+1\Leftrightarrow 3x^2-4x+1\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le x\le 1$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 9: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm, cô lập *m*, đưa phương trình về dạng $m=f(x)$.

- Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì đường thẳng $y=2m-1$ phải cắt đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ tại 3 điểm phân biệt.

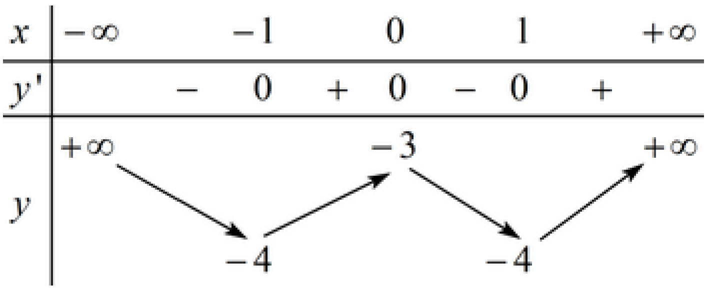
- Lập BBT hàm số $y=x^4-2x^2-3$, từ đó lập BBT hàm số $y=x^4-2x^2-3$, $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ và tìm m thỏa mãn.

Giải chi tiết:

Số nghiệm của phương trình $\left|x^4-2x^2-3\right|=2m-1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ và đường thẳng $y=2m-1$.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-3$ ta có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

BBT:

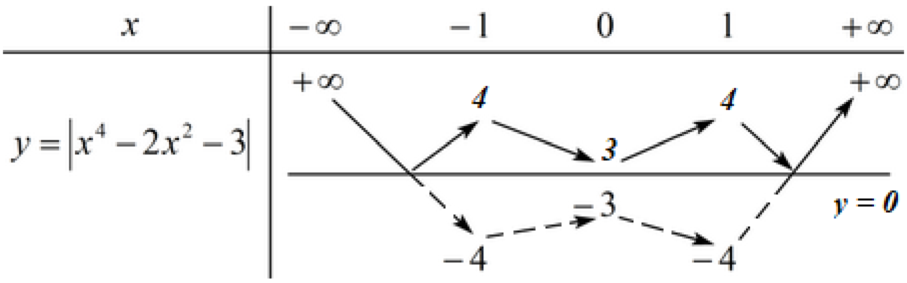


Từ đó ta suy ra BBT của đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$.

- Từ đồ thị $y=x^4-2x^2-3$ lấy đối xứng phần đồ thị bên dưới trục Ox qua trục Ox.

- Xóa đi phần đồ thị bên dưới trục Ox.

Ta có BBT của đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ như sau:



Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=2m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|x^4-2x^2-3\right|$ tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $3<2m-1<4 \Leftrightarrow 4<2m<5 \Leftrightarrow 2<m<\dfrac{5}{2}$.

Vậy $2<m<\dfrac{5}{2}$.

Câu 10: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm, cô lập *m*, đưa phương trình về dạng $m=f\left(x\right)$.

- Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt.

- Lập BBT hàm số $y=f\left(x\right)$ và tìm m thỏa mãn.

Giải chi tiết:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2>0 \\ x^2-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{2} \\ x<-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{2} \\ x<-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Ta có:

$\log_4 x^2=\log_2\left(x^2-2\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2.\log_2\left|x\right|=\log_2\left(x^2-2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left|x\right|=\log_2\left(x^2-2\right)\Leftrightarrow x^2-2=\left|x\right|$

$\Leftrightarrow \left|x\right|^2-\left|x\right|-2=0\Leftrightarrow \left|x\right|=2\Leftrightarrow x=\pm 2\left(tm\right)$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 11: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm, cô lập *m*, đưa phương trình về dạng $m=f\left(x\right)$.

- Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt.

- Lập BBT hàm số $y=f\left(x\right)$ và tìm m thỏa mãn.

Giải chi tiết:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3-12x+1-m=0\Leftrightarrow m=x^3-12x+1=f\left(x\right)$.

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-12=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

BBT:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy để đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt thì $-15<m<17$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-14;-13;-12;...;15;16\right\}$. Vậy có 31 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Sử dụng các công thức: $\log_a\left(xy\right)=\log_a x+\log_a y\left(0<a\neq 1,x,y>0\right)$

$\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b\left(0<a\neq 1,b>0\right)$

Từ giả thiết tính $\log_a b$.

- Biến đổi biểu thức cần tính bằng cách sử dụng các công thức trên, thay $\log_a b$ vừa tính được để tính giá trị biểu thức.

Giải chi tiết:

Theo bài ra ta có:

log√ab(a3√b)=log√ab(3√ab.3√a2)=log√ab3√ab+log√ab3√a2=log(ab)12(ab)13+1loga23(ab)12=132.logab(ab)+112.32loga(ab)=23+134(1+logab)⇒23+134(1+logab)=3⇒logab=−37logab(ab3)=logab(ab3.a23)=logabab3+logaba23=log(ab)12(ab)13+1loga23(ab)12=132.logab(ab)+112.32loga(ab)=23+134(1+logab)⇒23+134(1+logab)=3⇒logab=−37

$$\log_{\sqrt{ab}}\left(a\sqrt[3]{b}\right)=\log_{\sqrt{ab}}\left(\sqrt[3]{ab}.\sqrt[3]{a^2}\right)$$

$$=\log_{\sqrt{ab}}\sqrt[3]{ab}+\log_{\sqrt{ab}}\sqrt[3]{a^2}$$

$$=\log_{(ab)^{\frac{1}{2}}}\left(ab\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\log_{a^{\frac{2}{3}}}\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{3}2.\log_{ab}\left(ab\right)+\frac{1}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\log_a\left(ab\right)}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\log_a b\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}+\frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\log_a b\right)}=3$$

$$\Rightarrow\log_a b=-\frac{3}{7}$$

Khi đó ta có:

$$\log_{\sqrt{ab}}\left(b\sqrt[3]{a}\right)=\log_{\sqrt{ab}}\left(\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{b^2}\right)$$

$$= \log_{\sqrt{ab}} \sqrt[3]{ab} + \log_{\sqrt{ab}} \sqrt[3]{b^2}$$

$$= \log_{(ab)^{\frac{1}{2}}} (ab)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{b^{\frac{2}{3}}} (ab)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{3}.2.\log_{ab}(ab) + \frac{1}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\log_b(ab)}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{3}{4}(\log_b a + 1)}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}.\frac{1}{-\frac{7}{3}+1} = -\frac{1}{3}$$

Câu 13: Đáp án D

Phương pháp giải:

Lập BBT của hàm số trên $(0;+\infty)$ và tìm GTNN của hàm số.

Giải chi tiết:

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y' = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

BBT:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 12$.

Câu 14: Đáp án A

Phương pháp giải:

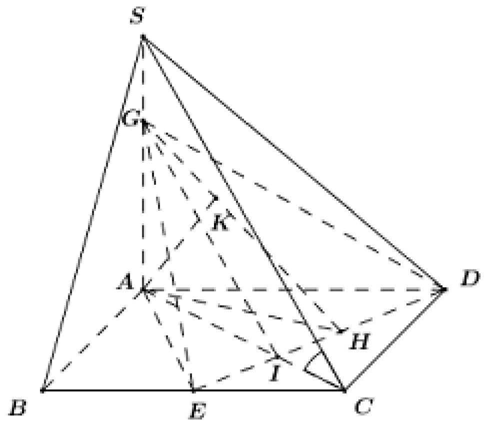
- Xác định mặt phẳng (P) chứa DE và song song với SC, khi đó $d(DE;SC) = d(SC;(P))$.

- Đổi sang $d(A;(P))$. Dựng khoảng cách.

- Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đó.

- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, định lí Pytago, diện tích … để tính khoảng cách.

Giải chi tiết:



Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap DE$, trong (SAC) kẻ $IG//SC\left(G \in SA\right)$, khi đó ta có $DE \subset (GDE)//SC$.

$\Rightarrow d\left(SC;DE\right) = d\left(SC;(GDE)\right) = d\left(C;(GDE)\right)$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có: $\frac{IC}{IA} = \frac{EC}{AD} = \frac{1}{2}$, do $AC \cap (GDE) = I$ nên $\frac{d\left(C;(GDE)\right)}{d\left(A;(GDE)\right)} = \frac{IC}{IA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(C;(GDE)\right) = \frac{1}{2} d\left(A;(GDE)\right)$.

Trong $(ABCD)$ kẻ $AH \perp DE(H \in DE)$, trong (GAH) kẻ $AK \perp GH\left(K \in GH\right)$ ta có:

$\begin{cases} DE \perp AH \\ DE \perp AG \end{cases} \Rightarrow DE \perp (AGH) \Rightarrow DE \perp AK$

$\begin{cases} AK \perp GH \\ AK \perp DE \end{cases} \Rightarrow AK \perp (GDE) \Rightarrow d\left(A;(GDE)\right) = AK$

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$

$\Rightarrow \angle\left(SC;(ABCD)\right) = \angle\left(SC;AC\right) = \angle SCA = 45^0$.

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AC = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a = SA$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có $\frac{AG}{AS} = \frac{AI}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AG = \frac{4a}{3}$.

Ta có: $S_{\Delta AED} = \frac{1}{2} d\left(E;AD\right).AD = \frac{1}{2} AB.AD = \frac{1}{2} a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = a^2$.

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông CDE ta có $DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

$\Rightarrow AH = \frac{2S_{AED}}{ED} = \frac{2a^2}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông GAH ta có

AK=AG.AH√AG2+AH2=4a3.2a√105□□

$$AK = \frac{AG.AH}{\sqrt{AG^2 + AH^2}} = \frac{\frac{4a}{3}.\frac{2a\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{10}}{5}\right)^2}} = \frac{4a\sqrt{19}}{19}.$$

Vậy $d\left(DE;SC\right) = \frac{1}{2} = \frac{2a\sqrt{19}}{19}$.

Câu 15: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Đặt ẩn phụ $t = 2^{x-2} > 0$.

- Cô lập m, đưa phương trình về dạng $m = g\left(t\right)\left(t > 0\right)$.

- Lập BBT của hàm số $g\left(t\right)$ khi $t > 0$.

- Dựa vào BBT tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Giải chi tiết:

Ta có $4^{x-1} - m.2^{x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4.\left(2^{x-2}\right)^2 - m.2^{x-2} + 1 = 0$.

Đặt $t = 2^{x-2} > 0$, phương trình đã cho trở thành $4t^2 - mt + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4t^2 + 1}{t} = g\left(t\right)\left(t > 0\right)$.

Xét hàm số $g\left(t\right) = \frac{4t^2 + 1}{t} = 4t + \frac{1}{t}$ có $g'\left(t\right) = 4 - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

BBT:

t	0		$1/2$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình có nghiệm $t > 0 \Leftrightarrow m \ge 4$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z}^+ \\ m \le 2021 \end{cases} \Rightarrow m \in \left\{4;5;6;...;2020;2021\right\}$.

Vậy có 2018 giá trị của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Chia tử cho mẫu để đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng đa thức + phân thức hữu tỉ có bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu.

- Phân tích mẫu thành nhân tử, biến đổi để xuất hiện các tích phân dạng $\int_1^2 \frac{k}{ax+b}dx$.

- Tính tích phân và tìm a,b,c

Giải chi tiết:

Ta có: $\int\limits_1^2 \frac{x^3-1}{x^2+x}dx = \int\limits_1^2 \left(x-1+\frac{x-1}{x^2+x}\right)dx$

$= \int\limits_1^2 (x-1)dx + \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x(x+1)}dx = \frac{1}{2}+I$

Giả sử $\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{B}{x}+\frac{C}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{B(x+1)+Cx}{x(x+1)}$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{(B+C)x+B}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} B+C=1 \\ B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=2 \end{cases}$

Khi đó ta có

$I = \int\limits_1^2 \frac{x-1}{x(x+1)}dx = \int\limits_1^2 \frac{-1}{x}dx + \int\limits_1^2 \frac{2}{x+1}dx$

$= -\ln|x|\Big|_1^2 + 2\ln|x+1|\Big|_1^2 = -\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2 = 2\ln 3 - 3\ln 2$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{x^3-1}{x^2+x}dx = \frac{1}{2}+2\ln 3 - 3\ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=2 \\ c=-3 \end{cases}$

Vậy $2a+3b-4c = 2.\frac{1}{2}+3.2-4.(-3)=19$.

Câu 17: Đáp án C

Phương pháp giải:

Sử dụng các công thức: $\log_a b^m = m\log_a b\left(0<a\neq 1, b>0\right)$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\left(0<a,b\neq 1\right)$

Giải chi tiết:

Ta có:

$\log_{45} 4 = 2\log_{3^2.5} 2 = \frac{2}{\log_2 3^2+\log_2 5}$

$= \frac{2}{2\log_2 3+\log_2 5} = \frac{2}{2a+b}$

Câu 18: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là $\overline{abcd}\left(a;b;c;d \in \{0;1;2;3;4;5\}, a\neq b\neq c\neq d\right)$.

- Vì $\overline{abcd}\,\vdots\,15$ nên $\begin{cases}\overline{abcd}\,\vdots\,5\Rightarrow d\in\{0;5\}\\ \overline{abcd}\,\vdots\,3\end{cases}$.

- Ứng với mõi trường hợp của d, tìm các cặp số a,b,c tương ứng.

Giải chi tiết:

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau là $\overline{abcd}\left(a;b;c;d\in\{0;1;2;3;4;5\},a\ne b\ne c\ne d\right)$.

Vì $\overline{abcd}\,\vdots\,15$ nên $\begin{cases}\overline{abcd}\,\vdots\,5\Rightarrow d\in\{0;5\}\\ \overline{abcd}\,\vdots\,3\end{cases}$.

+ TH1: $d=0$, số cần tìm có dạng $\overline{abc0}$ $\Rightarrow a+b+c\,\vdots\,3$.

Các bộ ba chữ số chia hết cho 3 là $\{1;2;3\};\{1;3;5\};\{2;3;4\};\{3;4;5\}$.

$\Rightarrow$ có $4.3!=24$ cách chọn a,b,c.

$\Rightarrow$ Có 24 số thỏa mãn.

TH2: $d=5$, số cần tìm có dạng $\overline{abc5}$ $\Rightarrow a+b+c+5\,\vdots\,3$ $\Rightarrow a+b+c$ chia 3 dư 1.

Các bộ ba chữ số chia 3 dư 1 là $\{0;1;3\};\{1;2;4\};\{0;3;4\}$.

$\Rightarrow$ có $2.2.2!+3!=14$ cách chọn a,b,c.

$\Rightarrow$ Có 14 số thỏa mãn.

Vậy có tất cả $14+14=38$ số thỏa mãn.

Câu 19: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ đến mặt phẳng $(P):Ax+By+Cz+D=0$ là $d\left(M;(P)\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Giải chi tiết:

$d\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|2.1+3-2.(-2)-3\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2$.

Câu 20: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Tính số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)$ là số cách chọn 3 học sinh bất kì.

- Gọi A là biến cố: “Ban sự lớp gồm 3 bạn có cả nam và nữ”. Xét 2 TH để tính số phần tử của biến cố A là $n(A)$.

+ TH1: Chọn 1 nam và 2 nữ

+ TH2: Chọn 2 nam và 1 nữ

- Tính xác suất của biến cố A: $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

Giải chi tiết:

Số cách chọn 3 bạn bất kì là C_{40}^{3} nên số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=C_{40}^{3}$.

Gọi A là biến cố: "Ban sự lớp gồm 3 bạn có cả nam và nữ".

TH1: Chọn 1 nam và 2 nữ có $C_{30}^{1}.C_{10}^{2}$ cách.

TH2: Chọn 2 nam và 1 nữ có $C_{30}^{2}.C_{10}^{1}$ cách.

$\Rightarrow n\left(A\right)=C_{40}^{1}.C_{10}^{2}+C_{40}^{2}.C_{10}^{1}$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{C_{30}^{1}.C_{10}^{2}+C_{30}^{2}.C_{10}^{1}}{C_{40}^{3}}=\dfrac{15}{26}=\dfrac{285}{494}$.

Câu 21: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Sử dụng công thức $\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$.

- Sử dụng công thức tính nguyên hàm mở rộng: $\int\dfrac{1}{\cos^2\left(ax+b\right)}dx=\dfrac{1}{a}\tan^2\left(ax+b\right)$.

Giải chi tiết:

Ta có:

$$\int\tan^2 2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 2x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 2x}dx-\int dx=\frac{1}{2}\tan 2x-x+C$$

Câu 22: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Sử dụng tính chất $\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

- Giải bất phương trình mũ: $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow f\left(x\right)\le g\left(x\right) khi\, 0<a<1$.

- Giải bất phương trình đại số tìm x, sau đó kết hợp điều kiện đề bài.

Giải chi tiết:

Vì $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{3\pi}{10}=\dfrac{5\pi}{10}=\dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin\dfrac{\pi}{5}=\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Khi đó ta có

$$\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^{x}\ge\left(\cos\frac{3\pi}{10}\right)^{\frac{4}{x}}\Leftrightarrow\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^{x}\ge\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{4}{x}}\Leftrightarrow x\le\frac{4}{x}\left(do\, 0<\sin\frac{\pi}{5}<1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -2\\ 0<x\le 2\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $x\in[-99;100]$ ta có $x\in[-99;-2]\cup(0;2]$.

Vậy phương trình đã cho có 100 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 23: Đáp án B

Phương pháp giải:

Gọi α là góc giữa (P) và Δ, khi đó ta có $\sin\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$, với $\overrightarrow{n_p}$ và $\overrightarrow{u_d}$ lần lượt là 1 vtpt của (P) và vtcp của Δ.

Giải chi tiết:

Mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$ có 1 vtpt là $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$ có 1 vtcp là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-2)$.

Ta có: $\sin\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\dfrac{\left|2.1-1.2+2.(-2)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{4}{9}$.

$\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.

Câu 24: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Gọi d là công sai của CSC trên. Sử dụng công thức SHTQ của CSC: $u_n=u_1+(n-1)d$, giải hệ phương trình tìm u_1,d.

- Sử dụng công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của CSC: $u_1+u_2+u_3+...+u_n=\dfrac{\left[2u_1+(n-1)d\right]n}{2}$

Giải chi tiết:

Gọi d là công sai của CSC trên. Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases}u_1+u_{2020}=2\\u_{1001}+u_{1021}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+2019d=2\\2u_1+2020d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{2021}{2}\\d=-1\end{cases}.$$

Vậy $u_1+u_2+...+u_{2021}=\dfrac{(2u_1+2020d).2021}{2}=\dfrac{2021}{2}$.

Câu 25: Đáp án D

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính khoảng cách từ A đến đường thẳng d là $d(A;d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$, trong đó M là điểm bất kì thuộc d và $\overrightarrow{u_d}$ là 1 vtcp của đường thẳng d.

Giải chi tiết:

Lấy $M(1;2;3)\in d$. Đường thẳng d có 1 VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(2;-2;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}\right]=(6;4;-4)$.

Vậy $d(A;d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\dfrac{\sqrt{6^2+4^2+(-4)^2}}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$.

Câu 26: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Để hàm số đồng biến trên $(0;1)$ thì $y'\ge 0\,\forall x\in(0;1)$.

- Cô lập m, đưa bất phương trình về dạng $m\le g(x)\,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le\min\limits_{[0;1]}g(x)$.

- Lập BBT hàm số $g(x)$ trên $(0;1)$ và kết luận.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D=(0;+\infty)$ nên hàm số xác định trên $(0;1)$.

Ta có $y'=8x^2+\dfrac{2}{x}-m$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;1)$ thì $y'\ge 0\,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le 8x^2+\dfrac{2}{x}\,\forall x\in(0;1)$.

Đặt $g(x)=8x^2+\dfrac{2}{x},x\in(0;1)$, khi đó ta có $m\le g(x)\,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow m\le\min\limits_{[0;1]}g(x)$.

Ta có $g'(x)=16x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{16x^3-2}{x^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}(tm)$.

BBT:

x	0		$1/2$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	10

Dựa vào BBT $\Rightarrow m\le 6$. Kết hợp điều kiện $m\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 giá trị của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Gọi tâm mặt cầu là I, tham số hóa tọa độ điểm $I\in\Delta$ theo biến t.

- Vì mặt cầu có tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên $R=d(I;(P))=d(I;(Q))$. Giải phương trình tìm t và suy ra tâm, bán kính mặt cầu.

- Mặt cầu tâm $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$, bán kính R có phương trình là $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2$.

Giải chi tiết:

Gọi tâm mặt cầu là $I\left(1+t;-1+t;2t\right)\in\Delta$.

Vì mặt cầu có tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên $R=d\left(I;(P)\right)=d\left(I;(Q)\right)$.

$$\Rightarrow\frac{\left|1+t-2\left(-1+t\right)+3.2t\right|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{\left|1+t-2\left(-1+t\right)+3.2t+4\right|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$$

$$\Leftrightarrow\left|5t+3\right|=\left|5t+7\right|\Leftrightarrow 5t+3=-5t-7\Leftrightarrow t=-1$$

Khi đó mặt cầu có tâm $I\left(0;-2;-2\right)$, bán kính $R=\frac{\left|-5+3\right|}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$.

Vậy bán kính mặt cầu cần tìm là $x^2+\left(y+2\right)^2+\left(z+2\right)^2=\frac{2}{7}$

Câu 28: Đáp án A

Phương pháp giải:

Tính nguyên hàm bằng phương pháp từng phần: $\int udv=uv-\int vdu$.

Giải chi tiết:

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=\left(2x-1\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\v=x^2-x=x\left(x-1\right)\end{cases}$

Khi đó ta có

$$\int\left(2x-1\right)\ln xdx=\left(x^2-x\right)\ln x-\int\left(x-1\right)dx=\left(x^2-x\right)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C$$

Câu 29: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Sử dụng phương pháp logarit cơ số 2 cả hai vế của phương trình, sau đó xét hàm đặc trưng.
- Rút a theo b, từ điều kiện của a suy ra điều kiện chặt chẽ hơn của b.
- Biến đổi $P=a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab$, đặt ẩn phụ $t=2ab$, lập BBT tìm miền giá trị của t.
- Sử dụng phương pháp hàm số tìm GTNN của biểu thức P.

Giải chi tiết:

Theo bài ra ta có:

$$2^{a+b+2ab-3}=\frac{1-ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow a+b+2ab-3=\log_2\left(1-ab\right)-\log_2\left(a+b\right)$$

$$\Leftrightarrow a+b+2ab-2=\log_2\left(1-ab\right)+1-\log_2\left(a+b\right)$$

$$\Leftrightarrow a+b+2ab-2=\log_2\left(2-2ab\right)-\log_2\left(a+b\right)$$

$\Leftrightarrow \log_2(a+b)+a+b=\log_2(2-2ab)+2-2ab\,(*)$

Xét hàm số $y=\log_2 t+t\,(t>0)$ ta có $y'=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\,\forall t>0$, do đó hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow a+b=2-2ab\Leftrightarrow a(1+2b)=2-b\Leftrightarrow a=\dfrac{2-b}{1+2b}$.

Vì $a,b>0\Rightarrow \dfrac{2-b}{1+2b}>0\Leftrightarrow 2-b>0\Leftrightarrow b<2$.

Khi đó ta có $P=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(2-2ab)^2-2ab$.

Đặt $t=2ab=2\dfrac{2-b}{1+2b}.b\,(0<b<2)$ ta có $t=2.\dfrac{2b-b^2}{1+2b}$

$$\Rightarrow t'=2.\frac{(2-2b)(1+2b)-(2b-b^2).2}{(1+2b)^2}$$

$$=2.\frac{2+4b-2b-4b^2-4b+2b^2}{(1+2b)^2}=\frac{4-4b-4b^2}{(1+2b)^2}$$

$t'=0\Leftrightarrow b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

BBT:

b	0		$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		2
t'		$+$	0	$-$	
t	0	$\nearrow$	$3-\sqrt{5}$	$\searrow$	0

$\Rightarrow t\in\left(0;3-\sqrt{5}\right]$.

Khi đó ta có $P=(2-t)^2-t=t^2-5t+4,t\in\left(0;3-\sqrt{5}\right]$.

Ta có $P'=2t-5=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}(ktm)$, do đó $P_{\min}=P\left(3-\sqrt{5}\right)=3-\sqrt{5}$.

Câu 30: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\le 0\,\forall x\in\mathbb{R}$

- Xét 2 TH: $m=0$ và $\begin{cases} m<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}$.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx - m - 1$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \le 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3mx^2 + 2mx - m - 1 \le 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 0 \\ -1 \le 0 \forall x \in \mathbb{R}\left(luon\,dung\right) \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m\left(m+1\right) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ 4m^2 + 3m \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ -\frac{3}{4} \le m \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ -\frac{3}{4} \le m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le m \le 0$$

Câu 31: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Để hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ thì $y' \ge 0 \forall x \in \left(0;+\infty\right)$.

- Cô lập m, đưa bất phương trình về dạng $m \le g\left(x\right) \forall x \in \left(0;+\infty\right) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{\left[0;+\infty\right)} g\left(x\right)$.

- Sử dụng BĐT Cô-si tìm $\min\limits_{\left[0;+\infty\right)} g\left(x\right)$.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D = \left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $y' = 2x + 8.\frac{2}{2x} - m = 2x + \frac{8}{x} - m$

Để hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ thì $y' \ge 0 \forall x \in \left(0;+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow 2x + \frac{8}{x} - m \ge 0 \forall x \in \left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m \le 2x + \frac{8}{x} \forall x \in \left(0;+\infty\right)\left(*\right)$.

Đặt $g\left(x\right) = 2x + \frac{8}{x}$, khi đó $\left(*\right) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{\left[0;+\infty\right)} g\left(x\right)$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $2x + \frac{8}{x} \ge 2\sqrt{2x.\frac{8}{x}} = 2.4 = 8 \quad \Rightarrow \min\limits_{\left[0;+\infty\right)} g\left(x\right) = 8$, dấu "=" xảy ra

$\Rightarrow 2x = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = 2$.

Từ đó ta suy ra được $m \le 8$, kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \in \left\{1;2;3;4;5;6;7;8\right\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Đặt $z=a+bi\left(a;b\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

- Thay vào giả thiết $3z+i\left(\overline{z}+8\right)=0$, đưa phương trình về dạng $A+Bi=0\Leftrightarrow A=B=0$.

Giải chi tiết:

Đặt $z=a+bi\left(a;b\in\mathbb{R}\right)\ \Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Theo bài ra ta có:

$$3z+i\left(\overline{z}+8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a+bi\right)+i\left(a-bi+8\right)=0\Leftrightarrow 3a+3bi+ai+b+8i=0$$

$$\Leftrightarrow 3a+b+\left(a+3b+8\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}3a+b=0\\ a+3b+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\end{cases}$$

Vậy tổng phần thực và phần ảo của z là $a+b=1+\left(-3\right)=-2$.

Câu 33: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Phân tích $MA^2+2MB^2-MC^2$ theo MI.

- Chứng minh đó $MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất.

- Với I cố định, tìm vị trí của $M\in\left(P\right)$ để $IM_{\min}$.

- Tìm tọa độ điểm I, từ đó dựa vào mối quan hệ giữa IM và $\left(P\right)$ để tìm tọa độ điểm M.

Giải chi tiết:

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Khi đó ta có:

$$MA^2+2MB^2-MC^2=\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2$$

$$=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IA}^2+2\overrightarrow{IB}^2-\overrightarrow{IC}^2$$

$$=2MI^2+\left(IA^2+2IB^2-IC^2\right)$$

Vì I,A,B,C cố định nên $IA^2+2IB^2-IC^2$ không đổi, do đó $MA^2+2MB^2-MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà $M\in\left(P\right)$ nên IM đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I lên $\left(P\right)$ hay $IM\perp\left(P\right)\Rightarrow\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{n_P}=\left(1;2;-2\right)$ cùng phương, với $\overrightarrow{n_P}$ là 1 vtpt của $\left(P\right)$.

Tìm tọa độ điểm I ta gọi $I\left(x;y;z\right)$. Ta có:

$$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\left(x-1;y;z-2\right)+2\left(x+1;y-1;z-3\right)-\left(x-3;y-2;z\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+2(x+1)-(x-3)=0 \\ y+2(y-1)-(y-2)=0 \\ z-2+2(z-3)-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \\ 2y=0 \\ 2z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow I(-2;0;4)$$

Khi đó ta có $\overrightarrow{IM}=(a+2;b;c-4)$

Vì $\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{n_P}=(1;2;-2)$ cùng phương, lại có $M \in (P)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{a+2}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c-4}{-2} \\ a+2b-2c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b+4=0 \\ b+c-4=0 \\ a+2b-2c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=-1+2+2=3$

Câu 34: Đáp án D

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức tính đạo hàm $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Giải chi tiết:

$$y'=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)'}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2x+2\sqrt{x}}.$$

Câu 35: Đáp án A

Phương pháp giải:

Tính nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến, đặt $t=2x^3-1$.

Giải chi tiết:

Đặt $t=2x^3-1 \Rightarrow dt=6x^2dx \Rightarrow x^2dx=\dfrac{dt}{6}$.

Khi đó ta có $\int x^2\left(2x^3-1\right)^2 dx=\int \dfrac{t^2dt}{6}=\dfrac{1}{6}.\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{\left(2x^3-1\right)^3}{18}+C$.

Câu 36: Đáp án A

Phương pháp giải:

Sử dụng phương pháp logarit hai vế.

Giải chi tiết:

Lấy logarit cơ số 3 hai vế của phương trình ta có:

$$2^x=3^{x^2} \Leftrightarrow \log_3 2^x=\log_3 3^{x^2} \Leftrightarrow x\log_3 2=x^2 \Leftrightarrow x\left(x-\log_3 2\right)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-\log_3 2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_3 2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực.

Câu 37: Đáp án C

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M.

- Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại $M\left(x_0;y_0\right)$ là $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$.

- Cho $A\left(1;0\right)\in d$, giải phương trình tìm số nghiệm x_0. Số nghiệm x_0 chính là số tiếp tuyến với đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(1;0\right)$ cần tìm.

Giải chi tiết:

Ta có $y'=3x^2-6x$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ là $y=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2\left(d\right)$.

Cho $A\left(1;0\right)\in d$ ta có:

$$0=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(1-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2$$

$$\Leftrightarrow 0=3x_0^2-6x_0-3x_0^3+6x_0^2+x_0^3-3x_0^2+2\Leftrightarrow 0=-2x_0^3-6x_0+2\Leftrightarrow x_0\approx 0,32$$

Vậy có duy nhất 1 tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A\left(1;0\right)$.

Câu 38: Đáp án C

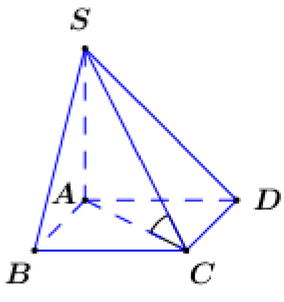
Phương pháp giải:

- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đó.

- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông để tính góc.

- Sử dụng công thức tính nhanh: Độ dài đường chéo của hình vuông cạnh a là $a\sqrt{2}$.

Giải chi tiết:



Vì $SA\perp\left(ABCD\right)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $\left(ABCD\right)$.

$\Rightarrow\angle\left(SC;\left(ABCD\right)\right)=\angle\left(SC;AC\right)=\angle SCA$.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$ nên $AC=a\sqrt{3}.\sqrt{2}=a\sqrt{6}$.

Xét tam giác vuông SAC ta có: $\tan\angle SCA=\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\angle SCA=30^0$.

Vậy $\angle\left(SC;\left(ABCD\right)\right)=30^0$.

Câu 39: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Hàm đa thức bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

- Giải phương trình $y''=0$ tìm hoành độ điểm uốn, từ đó suy ra tọa độ điểm uốn.

Giải chi tiết:

Ta có: $y=x^3-3x+2\Rightarrow y'=3x^2-3;y''=6x$.

Cho $y''=0\Leftrightarrow 6x=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=2$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có điểm uốn là $(0;2)$.

Vì hàm đa thức bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

Vậy hàm số đã cho có tâm đối xứng là $(0;2)$.

Câu 40: Đáp án B

Phương pháp giải:

- Nhận thấy $(x+1)e^x=\left(xe^x\right)'$. Sử dụng công thức $(uv)'=u'v+uv'$.

- Sử dụng phương pháp nguyên hàm hai vế để tìm $f(x)$.

- Tính $f'(x)$ và tính $f'(0)$.

Giải chi tiết:

Theo bài ra ta có

$$xf'(x)+(x+1)f(x)=e^{-x}\Leftrightarrow xe^xf'(x)+(x+1)e^xf(x)=1$$

Ta có $\left(xe^x\right)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$$\Rightarrow xe^xf'(x)+\left(xe^x\right)'f(x)=1$$

$$\Leftrightarrow\left[xe^xf(x)\right]'=1\Leftrightarrow\int\left[xe^xf(x)\right]'dx=\int dx\Leftrightarrow xe^xf(x)=x+C$$

Thay $x=0$ ta có $0=0+C\Leftrightarrow C=0$, do đó $xe^xf(x)=x\Leftrightarrow x\left[e^xf(x)-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f(x)=\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}\Rightarrow f'(0)=-e^0=-1$$

Câu 41: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Vì $d\perp(P)$ nên $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_P}$.

- Phương trình đường thẳng đi qua $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có 1 vtcp $\vec{u}(a;b;c)$ là $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

Giải chi tiết:

Mặt phẳng $(P): x-2y-3z+4=0$ có 1 vtpt là $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;-3)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;-1;-2)$ và vuông góc với (P) và $\overrightarrow{u_d}$ là 1 vtcp của đường thẳng d.

Vì $d\perp(P)$ nên $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_P}=(1;-2;-3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Câu 42: Đáp án B

Phương pháp giải:

Giải chi tiết:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

$$y'=9mx^8+6(m^2-3m+2)x^5+4(2m^3-m^2-m)x^3$$

$$y'=x^3\left[9mx^5+6(m^2-3m+2)x^2+4(2m^3-m^2-m)\right]$$

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\,(nghiem\,boi\,3)\\9mx^5+6(m^2-3m+2)x^2+4(2m^3-m^2-m)=0\ (*)\end{array}\right.$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $x=0$ phải là nghiệm bội chẵn của phương trình $y'=0$, do đó phương trình (*) phải nhận $x=0$ là nghiệm bội lẻ.

Vì $x=0$ là nghiệm của (*) nên thay x=0x=0 vào phương trình (*) ta có:

$$2m^3-m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{1}{2}\\m=0\end{array}\right.$$

Thử lại:

+ Với $m=0$ ta có $y'=12x^5$ không thỏa mãn $y'\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

+ Với $m=1$ ta có $y'=9x^8\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

+ Với $m=-\dfrac{1}{2}$ ta có $y'=-\dfrac{9}{2}x^8+\dfrac{45}{2}x^5=-\dfrac{9}{2}x^5(x^3-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{5}\end{array}\right.$, do đó không thỏa mãn $y'\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy có duy nhất 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=1$.

Câu 43: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Thay $x=\dfrac{1}{t}$, sau đó rút $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ theo $f(x)$ và thế vào giả thiết.

- Tìm $f\left(x\right)$ theo x và tính $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(x\right)dx$ bằng phương pháp tích phân 2 vế.

Giải chi tiết:

Ta có: $2f\left(x\right)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=x$, với $x=\frac{1}{t}$ ta có $2f\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}f\left(t\right)=\frac{1}{t}\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t}f\left(t\right)\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}f\left(x\right)\right)$

Khi đó ta có

$2f\left(x\right)+\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}f\left(x\right)\right)=x\Leftrightarrow 2f\left(x\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f\left(x\right)=x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}f\left(x\right)=x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{3}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(x\right)dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(x\right)dx=\frac{9}{8}\Leftrightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(x\right)dx=\frac{3}{4}$

Câu 44: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Xét phương trình hoành độ giao điểm.

- Áp dụng định lí Vi-ét cho phương trình bậc hai.

- Sử dụng công thức tính độ dài đoạn thẳng $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

Giải chi tiết:

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{x-2}{x-1}=1-2x\Leftrightarrow x-2=\left(x-1\right)\left(1-2x\right)$

$\Leftrightarrow x-2=x-1-2x^2+2x\Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0\ \left(*\right)$

Khi đó hoành độ của điểm A và B lần lượt là x_A,x_B là nghiệm của phương trình (*).

Áp dụng định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có: $A\left(x_A;1-2x_A\right);B\left(x_B;1-2x_B\right)$ nên:

$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(1-2x_B-1+2x_A\right)^2$

$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+4\left(x_B-x_A\right)^2$

$AB^2=5(x_B-x_A)^2$

$$AB^2=5\left[(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B\right]$$

$AB^2=5\left[1^2-4.\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=15$ Vậy $AB=\sqrt{15}$.

Câu 45: Đáp án A

Phương pháp giải:

- Gọi H là hình chiếu của S thuộc miền trong tam giác ABC, chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

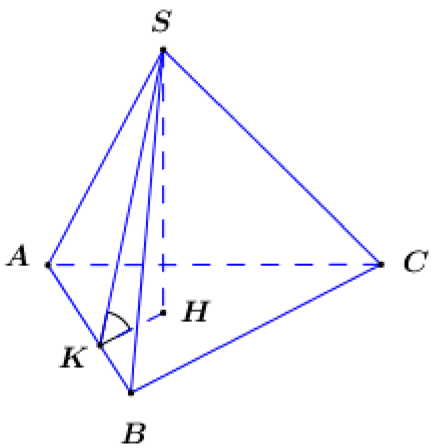
- Xác định góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

- Sử dụng công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $r=\frac{S}{p}$, với S,p lần lượt là diện tích và nửa chu vi tam giác.

- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông tính chiều cao khối chóp.

- Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}$.

Giải chi tiết:



Vì chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau và hình chiếu của S thuộc miền trong tam giác ABC nên hình chiếu của S là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Gọi H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC $\Rightarrow SH\perp(ABC)$

Xét ΔABC có $AB^2+BC^2=CA^2=25a^2$ nên ΔABC vuông tại B (định lí Pytago đảo).

Trong (ABC) kẻ $HK//BC(K\in AB)$ ta có $\begin{cases}AB\perp SH\\AB\perp HK\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SHK)\Rightarrow AB\perp SK$.

$$\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\SK\subset(SAB);SK\perp AB\\HK\subset(ABC);HK\perp AB\end{cases}$$

$\Rightarrow \angle\left(\left(SAB\right);\left(ABC\right)\right) = \angle\left(SK;HK\right) = \angle SKH = 60^0$.

Vì HK là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC nên $HK = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p_{\Delta ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}.3a.4a}{\frac{3a+4a+5a}{2}} = a$.

Xét tam giác vuông SHK ta có $SH = HK.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.3a.4a = 2\sqrt{3}a^3$.

Câu 46: Đáp án D

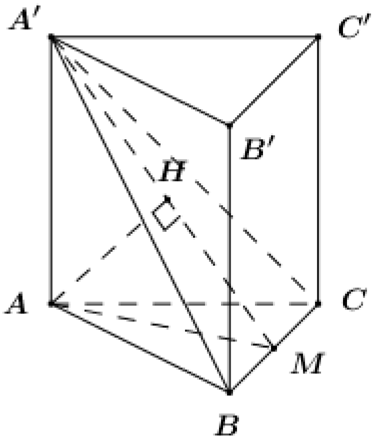
Phương pháp giải:

- Xác định góc từ điểm A đến $\left(A'BC\right)$.

- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính $A'A$.

- Tính thể tích $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{\Delta ABC}$.

Giải chi tiết:



Gọi M là trung điểm của BC ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(A'BC\right)$.

Trong $\left(A'BC\right)$ kẻ $AH \perp A'M\left(H \in A'M\right)$ ta có: $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp A'M \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(A'BC\right)$

$\Rightarrow d\left(A;\left(A'BC\right)\right) = AH = a$.

Vì tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $AM = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $S_{\Delta ABC} = \left(2a\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $AA'M$ ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{3a^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{2}{3a^2} \Rightarrow A'A = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2\sqrt{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 47: Đáp án D

Phương pháp giải:

Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = f(x)$; đồ thị hàm số $y = g(x)$; đường thẳng $x = a; x = b$ quanh quanh trục Ox là $V = \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$.

Giải chi tiết:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $3x - 2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right.$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $3x - 2$ và đồ thị hàm số v quanh quanh trục Ox là $V = \pi \int_1^2 \left| (3x-2)^2 - x^4 \right| dx = \frac{4\pi}{5}$.

Câu 48: Đáp án A

Phương pháp giải:

Sử dụng công thức $u_n = u_k q^{n-k}$

Giải chi tiết:

Giả sử cấp số nhân có công bội là q, khi đó theo bài ra ta có:

$$2(u_3 + u_4 + u_5) = u_6 + u_7 + u_8$$

$$\Leftrightarrow 2(u_3 + u_3 q + u_3 q^2) = u_6 + u_6 q + u_6 q^2 \Leftrightarrow 2u_3(1 + q + q^2) = u_6(1 + q + q^2)$$

$$\Leftrightarrow 2u_3 = u_6 \left(do 1 + q + q^2 > 0 = q \right)$$

$$\Leftrightarrow 2u_3 = u_3 q^3 \Leftrightarrow u_3(2 - q^3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_3 = 0 \\ q = \sqrt[3]{2} \end{array} \right.$$

Ta có:

$$\frac{u_8 + u_9 + u_{10}}{u_2 + u_3 + u_4} = \frac{u_8 + u_8 q + u_8 q^2}{u_2 + u_2 q + u_2 q^2} = \frac{u_8(1 + q + q^2)}{u_2(1 + q + q^2)} = \frac{u_2 q^6}{u_2} = q^6 = 4$$

Câu 49: Đáp án D

Phương pháp giải:

- Sử dụng công thức $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$; $|\overline{z}| = |z|$.

- Đặt $z = a + bi$, sử dụng công thức $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, biến đổi rút ra mối quan hệ giữa a, b và kết luận.

Giải chi tiết:

Theo bài ra ta có

$$|z - 1 + 3i| = |\overline{z} + 1 - i|$$

$\Leftrightarrow |z-1+3i| = |\overline{z} + \overline{1+i}| \Leftrightarrow |z-1+3i| = |\overline{z+1+i}| \Leftrightarrow |z-1+3i| = |z+1+i|$

Đặt $z = a+bi$ ta có:

$|a+bi-1+3i| = |a+bi+1+i|$

$\Leftrightarrow |(a-1)+(b+3)i| = |a+1+(b+1)i| \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+3)^2 = (a+1)^2 + (b+1)^2$

$\Leftrightarrow -2a+1+6b+9 = 2a+1+2b+1 \Leftrightarrow 4a-4b-8=0$

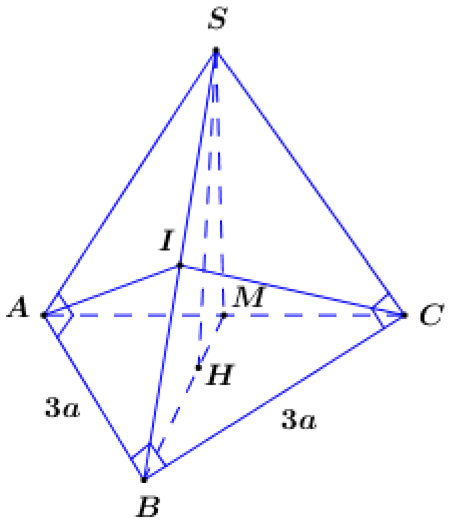
$\Leftrightarrow a-b-2=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x-y-2=0$.

Câu 50: Đáp án A

Phương pháp giải:

Giải chi tiết:



Gọi I là trung điểm của SB.

Vì $\angle SAB = \angle SCB = 90^0$ nên $IS = IA = IB = IC$, do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$, bán kính $R = IS = \frac{1}{2}SB$.

Xét $\Delta_v SAB$ và $\Delta_v SCB$ có $AB = CB(gt), SB$ chung $\Rightarrow \Delta_v SAB = \Delta_v SCB$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow SA = S \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S.

Gọi M là trung điểm của AC ta có $\begin{cases} SM \perp AC \\ BM \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBM)$.

Trong (SBM) kẻ $SH \perp BM$ ta có: $\begin{cases} SH \perp BM \\ SH \perp AC(AC \perp (SBM)) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Đặt $SA = SC = x$.

Vì ΔABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = 3a\sqrt{2} \Rightarrow BM = AM = MC = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lí Pytago ta có:

$SM=\sqrt{SC^2-MC^2}=\sqrt{x^2-\frac{9a^2}{2}}$

$SB=\sqrt{BC^2+SC^2}=\sqrt{9a^2+x^2}$.

Gọi p là nửa chu vi tam giác SBM ta có $p=\frac{\sqrt{x^2-\frac{9a^2}{2}}+\sqrt{9a^2+x^2}+\frac{9a^2}{2}}{2}$.

Diện tích tam giác SBM là: $S_{SBM}=\sqrt{p\left(p-SM\right)\left(p-SB\right)\left(p-BM\right)}$

Khi đó ta có $SH=\frac{2S_{\Delta SBM}}{BM}$.

Ta có:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}d\left(A;\left(SBC\right)\right).S_{\Delta SBC}$

$\Rightarrow SH.S_{\Delta ABC}=d\left(A;\left(SBC\right)\right).S_{\Delta SBC}$

$\Leftrightarrow \frac{2S_{\Delta SBM}}{BM}.\frac{1}{2}.3a.3a=a\sqrt{6}.\frac{1}{2}.3a.x\Leftrightarrow x=3\sqrt{3}a$

Áp dụng định lí Pytago ta có: $SB=\sqrt{SC^2+BC^2}=\sqrt{27a^2+9a^2}=6a\Rightarrow R=IS=3a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là $S=4\pi R^2=4\pi.9a^2=36\pi a^2$.